第3讲 有理数的乘方

**知识梳理**

**1．有理数乘方的意义**

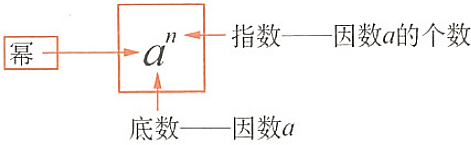
**定义：**求*n*个相同因数的积的运算，叫做**乘方**.乘方的结果叫做**幂**.

**意义：**(1)一般地，将*n*个相同因数*a*相乘，记作，即

*a*×*a*×*a*×…×*a*也可以记为*a*·*a*·*a*·…·*a*，即*a*·*a*·*a*·…·*a*=.

读作***a*的*n*次方**.当*an*看作*a*的*n*次方的结果时，也可读作***a*的*n*次幂**.

(2)在中，*a*叫做**底数**，*n*叫做**指数**.如图：



[学法指导](1)an具有双重含义：一是表示n个a相乘，是一种运算符号；二是表示乘方运算的结果，这个结果就是幂.

(2)一个数可以看作这个数本身的一次方.如3就是31，指数是1通常省略不写.

(3)底数是因数，指数是相同因数的个数.如23表示3个2相乘.

**[难点突破]**(-3)2与-32的区别与联系

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| (-3)2 | | -32 | |
| 相同点 | 指数均为2 | | |
| 不同点 | 底数不同 | 底数为-3 | 底数为3 |
| 意义不同 | 表示2个-3相乘的积 | 表示2个3相乘的积的相反数 |
| 结果不同 | 结果为9 | 结果为-9 |

的区别与联系

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | |  |
| 相同点 | 指数均为2 | | |
| 不同点 | 底数不同 | 底数为 | 底数为5 |
| 意义不同 | 表示2个的积 | 表示2个5的积与3的商 |
| 结果不同 | 结果为 | 结果为 |

**2．有理数乘方的运算方法**

(1)根据乘方的意义，先把乘方转化为乘法，再根据乘法的运算法则来计算；

(2)先确定幂的符号，再确定幂的绝对值.

**3．有理数乘方运算的符号法则：**

(1)负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数；

(2)正数的任何次幂都是正数，0的任何正整数次幂都是0.

[方法归纳]一看底数，二看指数.当底数是正数时，结果为正数；当底数是0时，结果是0；当底数是负数时，再看指数，若指数为偶数，结果为正数；若指数为奇数，结果为负数.

[重要提示](1)1的任何次幂都是1.

(2)-1的奇次幂都是-1，-1的偶次幂都是1.

(3)任何数的偶次幂都是非负数(比较常用的是二次方，如*a*2≥0).

(4)平方等于它本身的数只有0和1；立方等于它本身的数只有0和±1.

(5)有理数的乘方同有理数加减乘除运算一样分两步走：一是确定符号；二是确定绝对值.

(6)用字母*a*表示有理数，*n*为正整数，则有当*a*>0时，*an*>0；当*a*<0时，当*a*=0时，*an*=0.*a*2*n*=(-*a*)2*n*，(-*a*)2*n*+1=-*a*2*n*+1，*a*2*n*≥0.

**4．有理数乘方的性质**

根据乘方运算的性质和符号法则，可以得出以下结论：

(1)1的任何次幂都是1.

(2)-1的奇次幂是-1，-1的偶次幂是+1.

(3)一个数的偶次幂是非负数.即*a*2≥0(或*a*2*n*≥0).

(4)平方等于本身的数只有0或1，立方等于本身的数只有0和±1.

[温馨提示]***n*个非负数的和为零，这*n*个非负数同时为零.**

**5．乘方计算技巧**

技巧一：提公因数法.

[方法归纳]底数相同的幂进行加减运算时，可用提取公因数法计算.

技巧二：底数相乘法.

[方法归纳]若两个幂相乘(或相除)满足：(1)底数相乘的积(或相除的商)为整数.(2)指数非常接近，可由乘方意义将它们的指数转化成相同的指数达到让底数相结合的目的.

**6．乘方与有理数的绝对值、相反数等知识的综合应用**

注意有理数乘方性质的拓展，即互为相反数的两个数的偶次幂与奇次幂的关系.

(1)互为相反数的两个非零数的奇次幂仍然互为相反数，即若*a*+*b*=0，则*a*2*n*+1+*b*2*n*+1=0(*n*为自然数，*a*≠0，*b*≠0).

(2)互为相反数的两个非零数的偶次幂相等，即若*a*+*b*=0，则*a*2*n*=*b*2*n*(*n*为自然数，*a*≠0，*b*≠0).

**典型解析**

**例1：**(1)关于(-3)4的说法正确的是( ).

A．-3是底数，4是幂 B．-3是底数，4是指数，-81是幂

C．3是底数，4是指数，81是幂 D．-3是底数，4是指数，(-3)4是幂

[解析](-3)4表示4个-3相乘，所以底数为-3，指数为4，而(-3)4是幂.

[答案]D

(2)-24表示( ).

A．4个-2相乘 B．4个2相乘的积的相反数

C．2个4相乘 D．2个4相乘的积的相反数

答案：B [提示]-24的底数是2，而不是-2.

**例2：**计算：①； ②； ③； ④； ⑤； ⑥； ⑦.

解 ①；

②；

③；

④；

⑤；

⑥；

⑦.

**例3：**计算：(1)(-5)4； (2)-54； (3)； (5)(-1)2012.

[解析](1)中(-5)4表示4个-5相乘；(2)中-54表示54的相反数；(3)中表示3个相乘；(4)中表示23除以3的商的相反数；(5)中(-1)2012表示2012个(-1)相乘，结果是1.

[答案](1)(-5)4=(-5)×(-5)×(-5)×(-5)=625.

(2)-54=-(5×5×5×5)=-625.

[方法点拨]有理数的乘方运算可转化为有理数的乘法运算，再按照有理数的乘法法则，求得结果.

**【变式训练】**

计算：(1)，，；

(2)，，；

(3)，(为正整数).

解 (1)，

，

；

(2)，

，

；

(3)因为为正整数，所以为偶数，为奇数.由乘方运算的法则，得，.

**例4：**计算：

[解析]本题的5个小题的形式各不相同，解决这几个问题的关键是要分清局部乘方与整体乘方的关系.

[答案](1)

[温馨提示]的底数是的底数是.

**例5：**一个数的偶次幂是正数，这个数是( ).

A．正数 B．负数 C．正数或负数 D．任意有理数

答案：C [提示]正数和负数的偶次幂是正数，0的任何正整数次幂都是0.

**例6：**填空：

(1)若*m*、*n*互为倒数，则(*mn*)2012=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)若*m*、*n*互为负倒数，则(*mn*)2013=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(3)(*a*-2)2+|*b*+3|=0，则(*a*+*b*)2013=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析](1)*m*、*n*互为倒数，则*mn*=1；(2)*m*、*n*互为负倒数，则*mn*=-1；(3)(*a*-2)2与|*b*+3|都是非负数，它们的和为零，因此它们同时为零，故*a*=2，*b*=-3.

[答案](1)1；(2)-1；(3)-1

**【变式训练】**

已知，求、的值.

解 因为，，

又因为，

所以且，

所以，.

**例7：***a*、*b*互为相反数，下列各组数中，互为相反数的一组是( ).

A．*a*2与*b*2 B．-*a*3与*b*3

C．*a*2*n*与*b*2*n*(*n*为正整数) D．*a*2*n*+1与*b*2*n*+1(*n*为正整数)

答案：D [提示]令*a*>0，*b*<0，则*a*2*n*+1>0，*b*2*n*+1<0，而它们的绝对值均为*a*2*n*+1，即*b*2*n*+1=-*a*2*n*+1.

**例8：**计算：22012-22013.

[解析]22012与22013的底数相同，指数接近，可根据乘方意义将它们写成乘法形式后，提公因数计算.

[答案]解法一：原式=

.

解法二：原式=22012-2×22012=(1-2)×22012=-22012.

**例9：**求1+2+22+…+22018的值.

[解析]本题中参加运算的数较多，且幂指数较大，无法直接进行计算，对于这样的式子要先对其进行化简，消掉一些项后再进行计算.

[答案]设*S*=1+2+22+…+22018，则2*S*=2+22+…+22015+22019.

故*S*=2*S*-*S*=2+22+…+22015+22019-(1+2+22+…+22018)=22019-1.

**【变式训练】**

计算：.

答案：设则-①得，所以

**例10：探究数的排列规则**

(1)观察下列算式，用你所发现的规律得出22012的末位数字是( ).

21=2，22=4，23=8，24=16，25=32，26=64，27=128，28=256，…

A．2 B．4 C．6 D．8

[解析]22012的指数比较大，要直接算出数值比较麻烦，通过观察算式可以发现规律：指数从1开始，以2为底数的乘方，末位数字以2，4，8，6交替出现，也就是四个数为一周期.2012÷4=503，22012的末位数字应该与24的末位数字相同，所以22012的末位数字是6.

[答案]C

(2)观察下列算式：

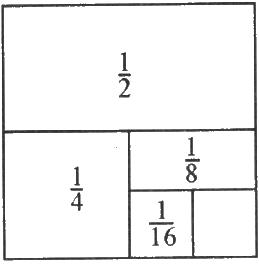
31=3，32=9，33=27，34=81，35=243，36=729，37=2187，38=6561，…通过观察，用你所发现的规律确定32000的个位数字是( ).

A．3 B．9 C．7 D．1

答案：D [提示]认真研究题中3*n*(*n*为正整数)的末位数字的变化情况，不难发现，3*n*的末位数字呈现以3，9，7，1这四个数字为周期的循环规律.因为2000能被4整除，所以32000的个位数字就是34的个位数字1.

**【变式训练】**

根据如图所揭示的规律进行计算：



答案： [提示]借助图形面积来计算.

**例11：**观察下面三行数：

-3，9，-27，81，-243，…

-5，7，-29，79，-245，…

-1，3，-9，27，-81，…

(1)第一行数按什么规律排列？

(2)第二、第三行数与第一行数分别有什么关系？

(3)分别取这三行数的第10个数，计算这三个数的和.

答案：(1)第一行数均为(-3)*n*，*n*为第*n*个数；

(2)第二行数为第一行对应的数减去2，第三行数为第一行数对应的数除以3；

(3)第一行的第10个数为(-3)10，

第二行的第10个数为(-3)10-2，

第三行的第10个数为

它们的和为

=118098-2+19683

=137779.

**【变式训练】**

问题：你能比较这两个数的大小吗？

为了解决这个问题，我们先把它抽象成这样的问题：写成它的一般形式，即比较和的大小(*n*是自然数).然后，我们从分析：*n*=1，*n*=2，*n*=3，…这些简单情形入手，从而发现规律，经过归纳，才想出结论.

(1)通过计算，比较下列各组中两个数的大小(在空格中填“<”“>”“=”)

①12\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_21； ②23\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_32； ③34\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_43；

④45\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_54； ⑤56\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_65； ⑥67\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_76.

的大小关系.

(3)根据上面归纳猜想得到的一般结论，试比较下列两个数的大小：

答案：

(2)当*n*=1或2时当*n*≥3，且*n*为自然数时，

**例12：**计算：.

规范解答

.

解后反思

对于有理数的运算，不管是加减法、乘除法还是乘方，首先要关注符号、确定符号.这是初一有理数运算与小学运算的主要区别.其次，对于高次运算，大多数需要简便方法.所以，运算之前先观察，确定好运算顺序和方法，充分考虑交换律、结合律、分配律等运算律的可行性.这样，对看似困难的问题也会迎刃而解.

**【变式训练】**

1．计算的结果是( )．

A．-2 B．-1 C．2 D．3

答案：C [提示]通过观察、分析可以发现，两个数的底数：，指数比较接近，所以可以转化为有理数乘法来求解.

2．计算：(1)； (2).

解：(1)4100×(-0.25)101.

(2)-2×(-2)9×()10=1.

**例13：**经过市场调查发现，某种电子产品每经过两年价格就降为原来的一半，已知这种电子产品六年前的价格为9600元，问现在的价格是多少元？

答案：(元).

答：这种电子产品现在的价格是1200元.

[提示]每两年价格降为原来的一半，价格六年降了三次.

**【变式训练】**

一根1m长的绳子第一次剪去一半，第二次剪去剩下的一半，如此剪下去，剪第六次后，剩下的绳子的长度为( ).

A． B． C． D．

答案：C [提示]第一次剪去一半后剩下，第二次剪去一半后剩下，…，第六次剪去一半后剩下

**同步训练**

**一、填空题**

1．写成幂的形式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_，底数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_，指数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_；写成乘法的形式是 \_\_\_\_\_\_\_\_\_，底数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_，指数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：  3   4

2．判断正负：

\_\_\_\_\_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_\_\_\_\_，

\_\_\_\_\_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_\_\_\_\_， \_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：正 负 负 负 负 正

3．(-*b*)3与-*b*3的关系是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(-*b*)4与-*b*4的关系是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：相等；互为相反数

4．平方等于本身的数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，立方等于本身的数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：0和1；0和±1

5．若一个数的平方是9，则这个数的立方是\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：27或

6．比较大小：

\_\_\_\_\_； \_\_\_\_\_；

\_\_\_\_\_； \_\_\_\_\_．

答案：＞ ＝ ＞ ＞

7．一根1米长的绳子，第一次剪去它的一半，第二次剪去剩下的一半，如此剪下去，到第五次后剩下的绳子长度是\_\_\_\_\_\_\_\_\_米．

答案： 

8．已知，，，，，的个位数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：2

**二、选择题**

9．(1)对于式子，以下说法正确的是( )．

(A)是底数，3是幂 (B)4是底数，3是幂

(C)4是底数，3是指数 (D)是底数，3是指数

(2)一个数的平方一定是( )．

(A)正数 (B)负数 (C)非正数 (D)非负数

(3)计算的值等于( )．

(A)0 (B)1 (C) (D)2

(4)如果一个有理数的偶次幂是非负数，那么这个数是( )．

(A)正数 (B)负数 (C)非负数 (D)任何有理数

答案：(1)D；(2)D；(3)A；(4)D.

10．下列说法正确的是( )．

(A)立方等于它本身的数是1，-1 (B)平方等于它本身的数是0，1，-1

(C)的指数是0 (D)互为相反数的两个数的平方相等

答案： D

**三、解答题**

11．计算：(1)； (2)； (3)； (4)； (5)；

(6)； (7)； (8)．

答案：(1)36；(2)；(3)；(4)；(5)；(6)169；(7)；(8)．

12．已知，请你算一算当，时的值分别是多少？

答案：当时，；当时，

**【探索创新】**

阅读理解：

，

，

，

，

，

，

……

(1)你知道这其中有什么规律吗？

(2)由此，你能推断出从1开始到的连续奇数之和等于多少吗？

.

(3)随意选择个连续奇数如：27，29，31，…，185，共80个奇数，求它们的和.

答案：(1)从1开始的连续个奇数之和为 (2) (3)原式